MATEMATIKA
prolecni seminar 2010

Seminar MATEMATIKE
Istraživačka stanica Petnica
datum: 15. maj 2010. godine
predavač: Andreja Ilić
e-mail: ilic_andrejko@yahoo.com

Kombinatorika sa stilom

Zadatak 1 *Koliko ima podskupova skupa A, pri čemu je $|A| = n$?*

Zadatak 2 *Koliko ima permutacija brojeva od 1 do n takvih da su brojevi 1 i 2 uzastopni? A šta u slučaju permutacija gde je broj 1 pre broja 2?*

Zadatak 3 *Koliko permutacija skupa $\{1, 2, \ldots n\}$ ima samo jedan ciklus?*

Zadatak 4 *Odrediti broj uredjenih parova (A, B), gde je $A \subseteq B \subseteq \{1, 2, ..., n\}$.*

Zadatak 5 *Koliko ima binarnih nizova duzine n koji sadrze paran broj nula?*

Zadatak 6 (Mala Fermaova teorema) *Neka je p prost broj. Želimo da napravimo zatvorenu ogrlicu sa tačno p perlica, a na raspolaganju su nam perlice obojene u a različitih boja. Odrediti broj različitih ogrlica i dokazati da važi*

$$p | a^p - a$$

Zadatak 7 *Koliko funkcija $f : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$ je monotono neopadajuća?*

Zadatak 8 *Koliko ima 5-cifrenih prirodnih brojeva cije su cifre u strogo rastućem poredku?*

Zadatak 9 (Katalanovi brojevi) *Medju svim trajektorijama od $(0, 0)$ do (n, n) dokazati da postoji tačno*

$$\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

trajektorija koje ne seku pravu $y = x$.

Zadatak 10 *Na koliko načina možemo izabrati dva disjunktna podskupa iz skupa sa n elemenata?*

Zadatak 11 *Dokazati da važi:*

- ***Adiciona formula**: $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$*
- ***Binomna formula**: $(x + y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$*
- ***Sumaciona formula**: $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n}{n-k} = \binom{2n}{n}$*

Zadatak 12 *Neka je $n \geq k + 2$. Koliko ima permutacija skupa $\{1, 2, \ldots n\}$ u kojima izmedju 1 i 2 stoji tačno k elemenata?*

Zadatak 13 (Stirlingovi brojevi) *Označimo sa S_n^k broj načina da se skup sa n elemenata razbije na k blokova. Dokazati rekurentnu formulu:*

$$S_n^1 = S_n^n = 1 \text{ i } S_n^k = S_{n-1}^{k-1} + kS_{n-1}^k$$

Zadatak 14 *Dokazati da je:*

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{n} = 2^n$$

Zadatak 15 *Koliko ima permutacija brojeca od 1 do n bez fiksne tačke?*

Zadatak 16 *Na koliko različitih načina n bračnih parova može sesti za okrugli sto sa $2n$ označenih stolia tako da supružnici ne sede jedno pored drugog?*

Zadatak 17 *Koliko se binarnih relacija može definisati na skupu sa n elemenata? Koliko postoji: a) refleksivnih, b) simetricnih, c) refleksivnih i simetričnih relacija?*

Zadatak 18 (The Sylvester Problem) *Konačan skup S tačaka ravni zadovoljava uslov da svaka prava kroz dve date tačke sadrži i treću. Pokazati da sve tačke leže na jednoj pravoj.*

Zadatak 19 *Da li postoji četvorka prirodnih brojeva (x, y, a, b) takva da važi*

$$x^2 + y^2 = 3(a^2 + b^2)$$

Zadatak 20 *Dokazati da za svako $n \in N$ postoji broj oblika $11\ldots1100\ldots00$ koji je deljiv sa n.*

Zadatak 21 *Neka je $n > 1$ prirodan broj. Naći broj permutacija $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ brojeva od 1 do n koje imaju sledeću osobinu: postoji tačno jedan indeks $i \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ za koji je $a_i > a_{i+1}$.*

Zadatak 22 *Neka je n neparan prirodan broj. Na tabli su napisani brojevi $1, 2, \ldots, 2n$. Mladi matematičar bira proizvoljna dva broja sa table a i b, briše ih i umesto njih piše $|a - b|$. Da li ovakvim brisanjem mladi matematičar može dobiti paran broj na kraju?*

Zadatak 23 *Odrediti na koliko različitih načina možemo da izvršiti triangulaciju mnogougla sa n temena. Ako obeležimo taj broj sa T_n, dokazati identitet:*

$$T_n = T_2 \cdot T_{n-1} + T_3 \cdot T_{n-2} + \ldots T_{n-1} \cdot T_2$$

Zadatak 24 *Koliko ima permutacija brojeva od 1 do n tako da je svaki element ili veći ili manji od svih prethodnih?*

Zadatak 25 (Erdos-Szekeres) *Svaki niz od $k = nm+1$ ralčitih realnih brojeva sadrži rastući podniz dužine $m+1$ ili opadajući dužine $n+1$. Dokazati.*

Zadatak 26 *Dokazati da se medju $n+1$ različitih prirodnih brojeva manjih od $2n$ mogu naći tri broja tako da jedan od njim bude jednak zbiru ostala dva.*

Zadatak 27 *Dokazati identitet:*

$$\binom{r}{r} + \binom{r+1}{r} + \ldots \binom{n}{r} = \binom{n+1}{r+1}$$

Zadatak 28 *Dati je prirodan broj $n > 2$ i tablica dimenzija $2 \times n$. Popunjavanje tablice brojevima $\{1, 2, \ldots, 2n\}$ nazivamo dobrim ako su u svakom redu i svakoj koloni tablice brojevi u rastućem poretku. Odrediti koliko ima dobrih popunjavanja.*

Zadatak 29 *Neka su $a_1, a_2, \ldots, a_n$ prirodni brojevi. Dokazati da postoji podskup ovih brojeva čiji ja suma deljiva sa n?*

Zadatak 30 (Young tableaux) *Jangov dijagram je konačan skup polja, levo uredjenih tako da svaka vrsta ima dužinu manju ili jednaku od prethodne. Jangova tablica se dobija popunjavanjem dijagrama različitim brojevima, tako da brojevi u svakoj koloni i svakoj vrsti formiraju rastući niz. Dizajnirati algoritam za formiranje Jangove tablice, na osnovu permutacije brojeva od 1 do n, kao i za brisanje proizvoljnog elemenata iz tablice.*