Друштво математичара Србије
Адреса: Кнез Михаилова 35/4,
11000 Београд
сајт: www.dms.rs
е-маил: pom@dms.rs

Решење проблема А за Јануар 2012
Матрица

Нажалост, на адресу редакције није стигло ни једно решење за овај проблем месеца. У поређењу са претходним проблемима, овај проблем месеца је доста тежи - како идејно тако и теоријски.

При анализи видећемо да се проблем своди на **2-SAT** проблем (енг. *2-satisfiability problem*). Да би разумели идеју овог решења неопходно је да се упознате са овим алгоритмом (као и самим проблемом). У овом документу нећемо описати алгоритам за *2-SAT* проблем. Како материјала за овај проблем (поготову на српском језику) има јако мало, потрудићемо се да у што краћем року поставимо пропратни документ за овај алгоритам. За сада препоручујемо да погледате следеће референце:

- *2-satisfiability (Wikipedia)*, адреса: http://en.wikipedia.org/wiki/2-satisfiability
- *A linear-time algorithm for testing the truth of certain quantified boolean formulas,* адреса: http://www.math.ucsd.edu/ sbuss/CourseWeb/Math268_2007WS/2SAT.pdf

На домаћим такмичењима *2-SAT* проблем је био на Савезном такмичењу 2003. Задатак Улице, најтежи проблем на том такмичењу, је мање више директна примена овог алгоритма. Ограничења у том задатку дозвољавају имплементацију слабије верзије овог алгоритма. Препоручујемо читаоцу да овај проблем уради и да на његовом корпусу примера тестира алгоритам за *2-SAT* проблем.

Напомена: Приметимо прво, да је овај проблем еквивалентан решавању система једначина

$$M[i,j] = a[i,j] + a[i+1,j] + a[i,j+1] + a[i+1,j+1]$$

где су $a[i,j]$ непознате којих има $n \cdot m$. Сложеност **Гаусовог система елиминације**, за решавање линеарног система једначина од N непознатих, је $O(N^3)$. У нашем случају то је заправо $O(n^3 \cdot m^3)$, што не задовољава наша ограничења. Међутим, систем који ми посматрамо је доста специфичан - његова "ширина" (енг. *bandwidth*) је $\sqrt{N} = m$ и у линеарној комбинацији учествује само четири ненула коефицијената. Члановима редакције није познат довољно брз алгоритам за решавање оваквог типа система који би задовољио ограничења овог проблема.

Алгоритам: Како треба реконструисати непознату матрицу a, питање, које се мање више само намеће, јесте: Који део матрице треба одредити тако да су остала поља јединствено одређена? Наравно, идеја је наћи што је могуће мањи део матрице и онда проблем свести на његово решавање. На овај начин добијамо мањи број промењивих, а то нам свакако не може одмоћи.

Након мало играња са нашом матрицом, можемо закључити да познавање вредности из прве колоне и прве врсте матрице a јединствено одређује остатак матрице (наравно уз помоћ матрице M). Како ово доказати? Елементе из друге врсте и друге колоне свакако можемо уз помоћ дате формуле израчунати преко ових вредности. Сада "индукцијом" по елементима матрице (крећемо се по врстама, а с лева на десно по конкретној врсти) а из:

$$a[i,j] = M[i-1,j-1] - a[i-1,j-1] - a[i,j-1] - a[i-1,j]$$

закључујемо да тврђење важи за све елементе матрице. Доказ да је ово заправо и скуп најмање кардиналности који јединствено дефинише остатак матрице, није једноставан, али нама није ни потребан. Овим смо добили "само" $n+m-1$ непознатих елемената матрице, од почетних $n \cdot m$, које треба одредити.

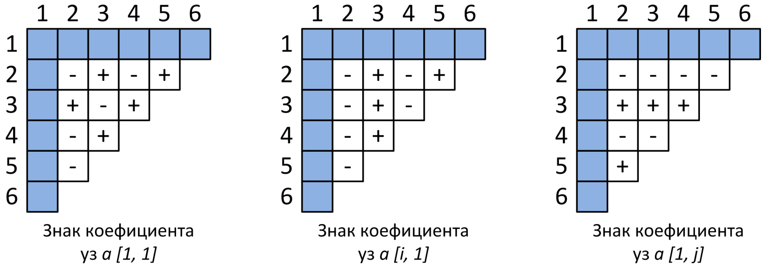
Уколико испишемо неколико горе описаних формула за "унутрашње" елементе (елементе који нису из прве врсте или колоне) матрице a:

$$\begin{aligned}
a[2,2] &= M[1,1] - a[1,1] - a[2,1] - a[1,2] \\
&= c[2,2] - a[1,1] - a[2,1] - a[1,2] \\
a[2,3] &= (M[1,2] - M[1,1]) + A[1,1] + a[2,1] - a[1,3] \\
&= c[2,3] + a[1,1] + a[2,1] - a[1,3] \\
a[3,2] &= (M[2,1] - M[1,1]) + a[1,1] - a[3,1] + a[1,2] \\
&= c[3,2] + a[1,1] - a[3,1] + a[1,2] \\
a[3,3] &= (M[2,2] + M[1,1] - M[1,2] - M[2,1]) - a[1,1] + a[3,1] + a[1,3] \\
&= c[3,3] - a[1,1] + a[3,1] + a[1,3]
\end{aligned}$$

видимо да елемент $a[i,j]$ можемо изразити као функцију елемената $a[1,1]$, $a[i,1]$ и $a[1,j]$ и коефицента који зависи од мама матрице. Другим речима, за конкретан елемент на позицији (i,j) није потребна цела прва врста и колона, веће само одговарајућа три елемента. Слично претходном тврђењу, ово се доказује индукцијом (погледати слику 1.). Тачније, добијамо следећу формулу:

$$a[i,j] = c[i,j] + (-1)^{i+j+1}a[1,1] + (-1)^{j+1}a[i,1] + (-1)^{i+1}a[1,j]$$

где $c[i,j]$ зависи од матрице M.



Слика 1. Знакови коефицијената уз одговарајуће елементе при рачунању вредности $a[i,j]$.

Матрицу c рачунамо преко рекурентне везе:

$$c[i,j] = M[i-1,j-1] - c[i-1,j] - c[i,j-1] - c[i-1,j-1]$$

Може се показати да важи следећа веза: $c[i,j] = \sum_{s<i,t<j}(-1)^{s+t}M[s,t]$. Но, она је само занимљива као чињеница, док ћемо ми користити горе описану рекурентну везу при иницијализацији матрице c.

Видимо да у свакој формули за унутрашње елементе учествује три елемента од који је један увек исти: $a[1,1]$. Како је матрица a бинарана, за ову вредност имамо две могућности. Зато проблем растављамо на два подпроблема: да ли постоји матрица a за коју је је $a[1,1] = 1$ и да ли постоји матрица a за коју је $a[1,1] = 0$. Дакле, у даљем делу претпостављамо да нам је вредност $a[1,1]$ позната (у крајњем алгоритму истпитујемо оба случаја). На овај начин добијамо да је

$$a[i,j] = \widehat{c}[i,j] + (-1)^{j+1}a[i,1] + (-1)^{i+1}a[1,j]$$

где знамо да су елементи матрице $\widehat{c}$ константе. Сада опет користимо чињеницу да је матрица a бинарна: вредност са десне стране горње једнакости мора бити 0 или 1 (јер је лева страна, као елемент матрице, "бинарна вредност"). Ради лакше анализе, горњу једначину записујемо у облику:

$$w = c + (-1)^{j+1}a + (-1)^{i+1}b$$

Како w може имати вредности 0 или 1 добијамо да је:

$$(0-c) \vee (1-c) = v \vee (v+1) = (-1)^{j+1}a + (-1)^{i+1}b$$

Сада имамо четири случаја (од којих ће неки имати подслучајеве):

1. $v \vee (v+1) = a + b$: У зависности од вредноти v, а ослањајући се на чињеницу да су и вредности a и b бинарне, имамо следеће подслучајеве:

   - $a + b = 0 \vee 1$: Једини случај који није могућ је $a = b = 1$, тако да се ово може превести у еквивалентни запис: $\neg a \vee \neg b$.
   - $a + b = 1 \vee 2$: Једини случај који није могућ је $a = b = 0$, тако да се ово може превести у еквивалентни запис: $a \vee b$.
   - $a + b = 2 \vee 3$: Једини случај који задовољава ово је $a = b = 1$, тако да се на овај начин вредности a и b фиксирају.
   - $a + b = -1 \vee 0$: Једини случај који задовољава ово је $a = b = 0$, тако да се на овај начин вредности a и b фиксирају.
   - за све остале могућности не постоји решење;

2. $v \vee (v+1) = -a - b$: Множењем са -1 овај случај се своди на претходни.
3. $v \vee (v+1) = a - b$: У зависности од вредноти v, а ослањајући се на чињеницу да су и вредности a и b бинарне, имамо следеће под случајеве:

   - $a - b = 0 \vee 1$: Једини случај који није могућ је $a = 0$ и $b = 1$, тако да се ово може превести у еквивалентни запис: $a \vee \neg b$.
   - $a - b = 1 \vee 2$: Једини случај који задовољава ово је $a = 1$ и $b = 0$, тако да се на овај начин вредности a и b фиксирају.
   - $a - b = -1 \vee 0$: Једини случај који није могућ је $a = 1$ и $b = 0$, тако да се ово може превести у еквивалентни запис: $\neq a \vee b$.
   - за све остале могућности не постоји решење;

4. $v \vee (v+1) = -a + b$: Множењем са -1 овај случај се своди на претходни.

Уколико ово разматрање применимо на све унутрашње елементе матрице a добијамо изразе облика:

- $a[i,j] = const$, где је $const \in \{0,1\}$ (фиксирана вредност);
- $\widetilde{a[i,1]} \vee \widetilde{a[1,j]}$, где је $\widetilde{a} \in \{a, \neg a\}$;

На овај начин смо, за фиксирану вредност $a[1,1]$, почетни проблем свели на **2-SAT** проблем по промењивама $a[i,1]$ и $a[1,j]$. Истпитивањем да ли постоји додела вредности $\{0,1\}$ промењивама $a[i,1]$ и $[1,j]$ које задовољавају горње изразе (за било коју почетну вредност $a[1,1]$) уједно испитујемо и постојање матрице a. Уколико за ове изразе постоји решење, на основу њега се може реконструисати цела матрица a.

Пример: Због тежине проблема, анализираћемо први пример дат у самом тексту (ткз. пример са папира). Дакле имамо да је $M = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$. Разматрићемо случај када је $a[1,1] = 1$. Применом горњих једначина имамо да је $c = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ односно $\widehat{c} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$. На основу овог добијамо следеће услове:

$$\begin{array}{ccccc}
-a[2,1] - a[1,2] + 1 = 0 \vee 1 & \Rightarrow & a[2,1] + a[1,2] = 0 \vee 1 & \Rightarrow & \neg a[2,1] \vee \neg a[1,2] \\
a[2,1] - a[1,3] + 1 = 0 \vee 1 & \Rightarrow & a[2,1] - a[1,3] = -1 \vee 0 & \Rightarrow & \neg a[2,1] \vee a[1,2] \\
-a[3,1] + a[1,2] + 1 = 0 \vee 1 & \Rightarrow & a[3,1] - a[1,2] = 0 \vee 1 & \Rightarrow & a[3,1] \vee \neg a[1,2] \\
a[3,1] + a[1,3] - 1 = 0 \vee 1 & \Rightarrow & a[3,1] + a[1,3] = 1 \vee 2 & \Rightarrow & a[1,3] \vee a[3,1]
\end{array}$$

Једноставном провером видимо да решење $c = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ задовољава горње изразе. Читоцу препоручујемо да до горњих формула дође и директном рачуницом, а не само применом горе описаних форумула (као што је овде изнето).

Имплементација: Имплементација овог алгоритма, до самог позива алгоритма за проблем **2-SAT**, мање више прати горе описане рекурентне везе. Овде је нећемо додатно описивати. Сложеност овог алогиртма је $O(n \cdot m) + O(2SAT) = O(n \cdot m)$.

Решење задатка припремио:

Андреја Илић,
Природно математички факултет, Ниш