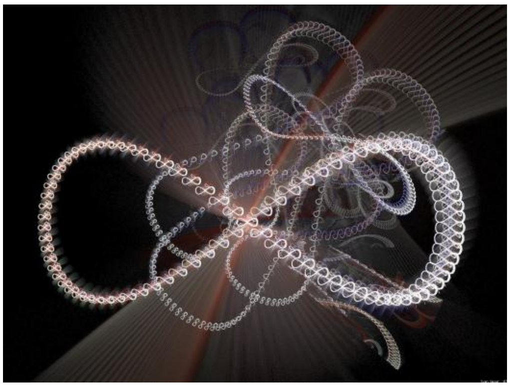
Beskonačnost(i)

“Šta se događa kada umremo? Zašto smo ovde? Zašto smo rođeni?... Beskonačnost pripada ovoj klasi pitanja... U isto vreme je zastrašujuće i uzbudljivo razmišljati o tome. Međutim posledice njenog postojanja prevazilaze sve granice našeg razuma...“

BCC Horizon – Infinity and Beyond



Beskonačnost, kako u matematici tako i u filozofiji, predstavlja koncept koji se odnosi na ’veličinu’ bez granice odnosno kraja. Reč beskonačnost dolazi iz latinskog jezika - *infinitas* što znači neograničenost. Potreba za pojmom beskonačnosti uočena je još u prvim koracima izgradnje matematike kao teorije. Čak je i sam Euklid u svojim Elementima (knjiga IX, lema 20) rekao da prostih brojeva ima više nego u bilo kom skupu prostih brojeva – gde je skup smatrao konačnim. Simbol bekonačnosti je leminskata (što znači gumica): ∞.

Započnimo naše putovanje ’jednostavnim’ pitanjem: **Da li postoji najveći broj?** Još kao deca, kada smo počeli da učimo da brojimo, uvideli smo da tom učenju zapravo nema kraja. Kad god bismo naučili novi broj, jednostavno dodavanjem jedinice istom dobili bi veći broj. Jedan od najvećih brojeva koji imaju svoje ime jeste **google**, koji je jednak 10^{100}. Ukoliko vam on ne deluje zastrašujuće veliko, napomenimo da se ni ukupan broj atoma iz kojeg je sastavljena zemlja ne može porediti sa njim. On je veći od bilo čega što ima smisla u prirodi, a sa druge strane on nije ništa bliži beskonačnosti od broja 1! Većina ljudi pogrešno tumači pojam bekonačnosti kao broj. Naime, beskonačnost ne predstavlja broj u matematici već jednu klasu pojmova. Da bismo bolje razumeli navedenu klasu, spustićemo se koji korak niže na lestvici: u teoriju skupova.

Iako zvuči vrlo jednostavno, u matematici se teorija skupova se formalno jako teško uvodi. Iz tog razloga se u školstvu iznosi **naivna teorija skupova** koja je, za razliku od aksiomatski zasnovane teorije, jako intuitivna. Osnivač teorije skupova je nemački matematičar Georg Kantor (1845 – 1918). U naivnoj teoriji skupova sam pojam skupa se ne definiše, već se uzima kao polazni pojam – baza od koje gradimo ostale pojmove. Intuitivno on predstavlja kolekciju objekata pri čemu se oni objedinjavaju nekim zajedničkim svojstvom. Na ovaj način teorija skupova je uvedena nizom relacija i operacija nad skupovima. Međutim, glavni problem je predstavljao navedeni uslov kojim se elementi grupišu u skup. Primera radi, na ovaj način se skup svih brojeva koji su potpuni kvadrati definiše kao $\{x \mid \text{ako postoji prirodni broj } y \text{ takav da je } y^2 = x\} = \{1, 4, 9, 16,\ldots\}$. Postavlja se pitanje, da li dati uslov može biti proizvoljan? Odgovor na ovo pitanje je negativan, čime je naivna teorija skupova pala. Prvi koji je uočio ovu činjenicu bio je Betrand Russel (1897 – 1970). Pardoks, sada poznatiji kao **Raselov paradoks**, ovde prvo iznosimo u malo drugačijem obliku (prvobitni paradoks je bio definisan preko

pojmova iz same teorije skupova ali su ideje identične). Pogledajmo sliku Pinokija i obratimo pažnju na rečenicu koju on izgovara. Još iz detinjstva smo svi upoznati sa Pinokijom i njegovim avanturama. Ono što ga izdvaja od ostali likova je da svaka laž koju on izgovori prouzrokuje da njegov nos poraste. Vratimo se na rečenicu: ona je ili istinita ili je laž. Ukoliko je istina, to znači da će njegov nos porasti. Međutim, ukoliko on poraste to povlači da je slagao, tj. da je rečenica laž, što je suprotno sa našom pretpostavkom da je rekao istinu. Sa druge strane, ukoliko je rečenica koju je izgovorio laž, to znači da nos neće da mu poraste (po rečenici koju je izgovorio), međutim, kako njegov nos uvek poraste kada laže i sada će, što je opet suprotno pretpostavci. Ovim smo pokazali da Pinokio zapravo ne postoji... Šalu na stranu, paradoks zasnovan na sličnoj ideji možemo u teoriji skupova definisati kao: definišimo skup A kao skup svih skupova koji nisu svoji elementi. Postavlja se pitanje da li je A pripada sebi ili ne. Oba slučaja dovode do kontradikcije (protivurečnosti). Ovim je ozbiljno bio poljuljan temelj matematike kao nauke, tako da se ipak moralo pribeći njenoj aksiomatizaciji. Ali to je neka sasvim druga avantura...

Vratimo se našoj priči o beskonačnosti. Kada treba ispitati da li dva konačna skupa imaju isti broj elemenata, najjednostavnije je izbrojati koliko elemenata ima u svakom i jednostavno uporediti ta dva broja. Broj elemenata jednog skupa nazivamo kardinalnost. Tu nailazimo na problem: koliko elemenata ima skup prirodnih brojeva {1, 2, 3, ...}. On svakako nije konačan (šta god to značilo). Ideju o jednakosti dva skupa možemo iskazati i kroz jedan misaoni eksperiment. Zamislimo da je u prazan autobus ušao odredjeni broj putnika. Kada možemo reći da je broj ljudi koji je ušao jednak broj sedišta u autobusu? Jednostavno, rećićemo svim ljudima da sednu. Ukoliko svi nađu mesto za sedenje i ako su sedišta su popunjena, onda možemo reći da ima jednak broj sedišta i putnika. Ideja o jednakosti dva konačna skupa se prenosi na opšte skupove na sledeći način: za dva skupa kažemo da imaju jednak broj elemenata ukoliko se može uspostaviti bijekcija između njih. Drugim rečima ako se svakom elementu iz prvog skupa dodeli tačno jedan element iz drugog skupa pri čemu je svaki element iz drugog skupa dodeljen tačno jednom elementu iz prvog skupa, tj. vršimo uparivanje između elemenata skupova. Iako sasvim prirodno proširenje intuitivnog poimanja jednakosti broja elemenata dva skupa dobijaju se neke neverovatne stvari: **broj parnih prirodnih brojeva je jednak broju prirodnih brojeva**. Bijekcija koja ovo definiše je sasvim jednostavna: $f(2n) = n$. Dakle, svakom parnom broj $2n$ dodelimo prirodan broj n. Posledica ove prelepe činjenice je da pravi podskup (podskup koji je različit od praznog skupa i njega samog) može imati isti broj elemenata kao i sam skup. Ne samo da ovo naravno nije tačno za konačne skupove, već se ovo protivi nekim prirodnim razmišljanjima: da polovina nečeg može biti jednaka samoj celini... Kao što je i sam Kantor jednom prilikom rekao: „Gledam i vidim, ali i sam ne verujem”.

Ako mislite da je ovo čudno, razmotrimo sledeće pitanje: da li ima više prirordnih ili realnih brojeva? Ispostavlja se da u ovom slučaju ima više realnih. Prvi koji je dokazao ovu lemu bio je sam Kantor. Dokaz je jednostavan, ali ga se treba setiti:

Pretpostavimo, suprotno od onoga što dokazujemo, da se skup svih realnih brojeva od 0 do 1 može poređati u niz $a_1, a_2, a_3,...$ Ukoliko je ovo moguće izvršili smo uparivanje prirodnih brojeva i realnih iz intervala $(0, 1)$. U suštini kada čovek prebrojava neke objekte on ih jednostavno uparuje sa brojevima $1, 2, 3,...$ pa ih onda možemo zapisati u obliku niza. Niz a ima oblik:

$$a_1 = 0.a_{11}\, a_{12}\, a_{13}\, a_{14} \ldots$$
$$a_2 = 0.a_{21}\, a_{22}\, a_{23}\, a_{24} \ldots$$
$$a_3 = 0.a_{31}\, a_{32}\, a_{33}\, a_{34} \ldots$$
$$\ldots$$

Pretpostavka nam je da se u ovom nizu nalaze svi realni brojevi iz *(0, 1)*. Definišimo broj $x = c_1c_2c_3c_4....$ kao: c_1 se razlikuje od cifre a_{11}, c_2 se razlikuje od a_{22}, c_3 od a_{33},… Na ovaj način dobijamo broj koji pripada intervalu *(0, 1)* ali koji je različit od svih brojeva u nizu a. Ovo povlači sa sobom da niz a ne sadrži sve elemente iz datog intervala, tj. da nam polazna pretpostavka nije korektna.

Kantor tako dolazi do prve beskonačnosti višeg reda od beskonačnosti prirodnih brojeva. Sada nastaje totalno ludilo - **ne postoji samo jedna beskonačnost**. Postoji ceo spektar beskonačnosti. Dve beskonačnosti koje mi srećemo u svakodnevnom 'matematičkom životu' su kardinalnost prirodnih brojeva N_0 (čita se alef nula) i kardinalnost realnih brojeva C (čita se kontinuum). Odgovor na gore postavljeno pitanje se može napisati kao: $N_0 < C$. Za skup koji ima alef nula elemenata kažemo da je prebrojiv. Sva naša shvatanja o realnim i prirodnim brojevima ne mogu se preneti na operacije sa kardinalnim brojevima (kardinalni brojevi su oni brojevi koji predstavljaju broj elemenata nekih skupova: 0, 1, 2, ..., N_0, C). Primera radi imamo da je $N_0 = N_0 + 1$, što u skupu realnih brojeva nema smisla. Ovo možemo iskazati simpatičnom pričom Davida Hilberta (1862 – 1943):

Ulazi čovek u hotel u kome su sobe numerisane prirodnim brojevima: 1, 2, 3,... (ima ih beskonačno mnogo). Prilazi recepcionaru i zahteva sobu za prenoćište, na šta mu recepcionar odgovara da su sve sobe zauzete i da ne može da ga primi. Gost mu da to odgovara: Kako nema mesta? Samo prebacite gosta iz prve sobe u drugu, iz druge u treću, iz treće u četvrtu i tako redom – a ja ću uzeti sobu sa rednim brojem 1.

Ričard Dedekind (1831 – 1916) je posle ovih prvih Kantorovih rezultata i predložio definiciju beskonačnog skupa: *Skup je beskonačan ako i samo ako je istobrojan se nekim svojim pravim podskupom.* Neka od ovih čudnih svojstva beskonačnih skupova koja Kantor pronalazi i dokazuje nisu bila nepoznata i ranije. Međutim, u antici je ovo služilo upravo kao argument da aktuelno beskonačne skupove treba odbaciti baš zato što proizvode ovakve paradokse. Ne zaboravimo Euklidovu aksiomu: Celina je uvek veća od svakog svog dela, koja i namerava da zabrani rad sa beskonačnošću. Stoga navedena Dedekindova definicija deluje ili kao ironija ili kao "prst u oko". Kantor je otvorio vrata Zemlje čuda i Alisa nije mogla da odoli da kroz njih ne zakorači...

Međutim, čim je Kantor počeo sa objavljivanjem svojih rezultata, naišao je na žestoko protivljenje od strane tadašnjih umova matematike, a pogotovu od strane Leopolda Kronekera (1823 – 1891) koji je u tom trenutku verovatno bio najuticajniji nemački matematičar. Zbog temperamenta obojice i zbog Kantorovih psihičkih problema, rasprava je bila veoma žustra. Kroneker se nije libio čak ni da ometa publikovanje Knatorovih radova, koje je smatrao emistemološki sumnjivim. "Međutim, Kantorovo čedo se rodilo i valjalo ga je ljuljati..."

Sledeći značajni rezultat pokazuje da je skup svih podskupova nekog skupa (tzv. partitivni skup) veće kardinalnosti od polaznog skupa. Ovo nam omogućava da izgradimo beskonačnu skalu bekonačnih brojeva. Postoji beskonačno beskonačnosti. Čoveku je dugo bilo potrebno da se izbori sa pojmom beskonačnosti i konceptom koji on krije iza sebe, a onda iz njenog postojanja nailazimo na lavinu čudnih, ali uzbudljivih činjenica. Kantor je beskonačne skupove uveo kao uopštenje prirodnih brojeva. Jedno od pitanja koje je Kantor ostavio otvorenim, danas poznatim kao Hipoteza kontinuuma glasi: *Da li postoji kardinalni broj koji je između kardinalnog broja svih prirodnih brojeva i kardinalnog broja svih realnih brojeva?* Problem kontinuuma je jedan od 23 veoma važna nerešena problema koji je poznati nemački matematičar David Hilbert postavio 1900. godine na kongresu matematičara u Parizu. On ni do danas nije rešen, ali su dokazane dve interesantne stvari. Kurt Gedel (1906 – 1978) je 1938. godine dokazao da dodavanje Uopštene kontinuum hipoteze standardnim aksiomama teorije skupova ne dovodi do protivurečnosti. Još zanimljiviji rezultat dobio je Džordž Koen (1934 – 2007) 1963. godine, koji je dokazao se Uopštena kontinuum hipoteza ne može dokazati polazeći od sadašnjih aksioma teorije skupova.

Priču o beskonačnosti završavamo citatom Davida Hilberta na gore pomenutom kongresu koja na najbolji način opisuje lepotu i savršenstvo ove teorije: “Niko nam ne može oduzeti parče raja koje je Kantor stvorio za nas...”