

## Teorija malog sveta

*Svako od nas je barem jednom imao iskustvo "malog sveta" (malog u smislu poznanstva među ljudima a ne fizičke veličine). Međutim, obično se ne zapitamo da li je to puka slučajnost ili nešto sasvim normalno i očekivano.*

**Teorija malog sveta** se zasniva na konceptu da su svaka dva stanovnika planete povezana samo preko šest poznavanja. Drugim rečima, svaku osobu na planeti možete upoznati preko lanca "prijatelj prijatelja" čija je dužine otprilike 6. Činjenica da živimo u malom svetu na prvi pogled deluje jako neverovatno i uzbudljivo iz više razloga. Preporučujemo da pre samog čitanja članka razmislite malo o samoj ideji i posledicama ovog fenomena. Podsetimo se da trenutno oko 7 milijardi ljudi hoda planetom (očekuje se da novembra 2011. godine ovaj broj pređe 7 milijardi - <http://www.poodwaddle.com/clocks/worldclock/>).

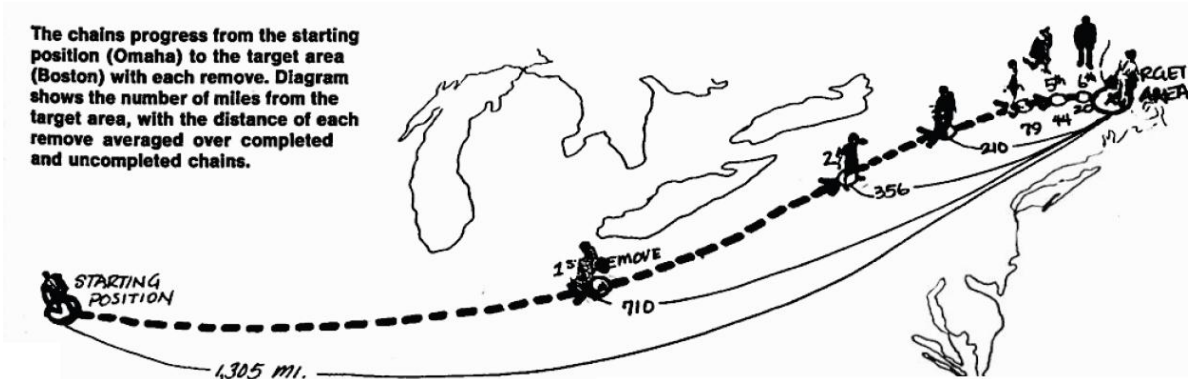


Na početku, uvedimo par matematičkih notacija i pojmova koji će nam biti potrebni u daljem tekstu. Napomenimo odmah da u samom tekstu nećemo formalno definisati pojmove i zaključke. U neku ruku se oslanjamo na savet Stivena Hokinga: *svaka jednačina koju ubacimo u knjigu će prepoloviti broj čitalaca*. Teorija malog sveta se odnosi na socijalne mreže (grafove). Koncept socijalne mreže nije jednostavno definisati ali za naše potrebe dovoljno je da ga definišemo kao mrežu ljudi koji su povezani poznanstvima – dve osobe su povezane ukoliko se poznaju. Ovde podrazumevamo da je samo poznanstvo neusmerena veza – ako osoba A poznaje osobu B tada i osoba B poznaje osobu A. Preko ovih poznavanja, vi možete pristupiti svojim prijateljima, zatim prijateljima svojih prijatelja... Pod rastojanjem između dve osobe podrazumevaćemo najmanji broj poznavanja potreban da se ova dve osobe upoznaju. Primera radi, rastojanje između vas i prijatelja vašeg prijatelja je 2. U daljem tekstu posmatraćemo i neke druge socijalne mreže, ali će koncept biti isti, ili da se matematički izrazimo - izomorfan (primera radi posmatraćemo glumce i povezati ih ukoliko su glumili u istom filmu).

Prvi empirijski "dokaz" fenomena malog sveta objavio je američki sociolog **Stanley Milgram** (1933 - 1984) 1967. godine. Naime, Milgram je sproveo socijalni eksperiment, poznat pod imenom "**Eksperiment malog sveta**", koji je testirao rastojanja u socijalnoj mreži ljudi. Kako je ispitivanje celokupne mreže nemoguće, Milgram je na interesantan način ispitao ovu hipotezu na uzorku. Na slučajan način izabrao je 296 osoba, zvanih starteri, i od njih tražio da proslede pismo ciljnoj osobi, brokeru iz Bostona. Svaki od startera je imao samo određene informacije o ciljnoj osobi (ime, adresu i zanimanje). Međutim uslovi eksperimenta su bili da se pismo ne šalje direktno ciljnoj osobi, već samo posredstvom nekog prijatelja. Drugim rečima, svako od startera je mogao da prosledi pismo samo jednom svom prijatelju, zatim taj prijatelj nekom svom prijatelju, i tako redom sve dok se ne bi došlo do osobe koja je poznavala ciljnu osobu direktno. Zaprepašujuć rezultat je bio da je čak 64 pisama, što je

negde malo manje od trećine, stiglo na željenu adresu. Dužine ovih putanja su bile manje ili jednake 10, pri čemu je srednja dužina bila jednaka 6 - broj koji je nakon dve decenije završio u istoimenom pozorišnom komadu i koji se i dan danas uzima kao reper ovog fenomena.

Milgramov eksperiment je demonstrirao dve neverovatne osobine velikih socijalnih mreža: prvu, da je mreža išarana kratkim putevima; i drugu, da ljudi (čvorovi mreže), vodeći se samo lokalnom slikom mreže, imaju sposobnost da nalaze ove kratke puteve. Pod lokalnom slikom podrazumevamo da svako od nas zna samo kako su njegovi prijatelji međusobno povezani, dok su već prijatelji prijatelja i njihove veze za nas apstraktni. Napomenimo da putevi dobijeni Milgramovim eksperimentom nisu bili najkraći (to i ne možemo utvrditi) već jako dobre aproksimacije kratkih puteva. Relativno lako je zamisliti socijalnu mrežu u kojoj važi prva činjenica, ali druga je uvela još jednu dozu oduševljenja među naučnicima. Dakle, poznavajući samo neke osobine ciljne osobe u mreži, čovek je posmatrajući samo svoje prijatelje sposoban da izabere poznanika koji će očekivano brzo da prosledi informaciju ciljnoj osobi. Ovo je bila ideja još jednog interesantnog eksperimenta koji je proučavao strategije kojima su se ljudi vodili pri prosleđivanju pisama - najmasovnije strategije su bile vezane za geografski položaj i zanimanje.



Slika iz izvornog rada Milgrama o eksperimentu malog sveta koja prikazuje prosečan put pisma.

**Pol Erdoš** (1913 - 1996) je bio čuveni Mađarski matematičar, koji je izdao najveći broj matematičkih radova u istoriji (najmanje 1525). Verovatno je većini poznat po priči o **Knjizi** (eng. **The Book**) koja je sadržala sve najlepše i najelegantnije dokaze matematičkih teorema - "Nije potrebno da verujete u Boga, ali bi trebalo da verujete u *Knjigu*", pričao je sam Erdoš. Povučena ovom idejom počeo je sa prikupljanjem najinteresantnijih i najelegantnijih dokaza teorema u kojima danas možete uživati čitajući knjigu **Dokazi iz Knjige** (eng. **Proofs from THE BOOK**). No vratimo se mi našoj priči o malom svetu. U njegovu čast, matematičari su uveli pojam **Erdoševog broja**. Erdošev broj predstavlja koautorsko rastojanje između posmatranog matematičara i Pola Erdoša. Drugim rečima, ukoliko posmatramo skup matematičara i definišemo vezu između njih ukoliko su izdali zajednički naučni rad, Erdošev broj za konkretnog matematičara bi predstavljalo minimalno rastojanje između njega i Erdoša. Ispostavilo se da

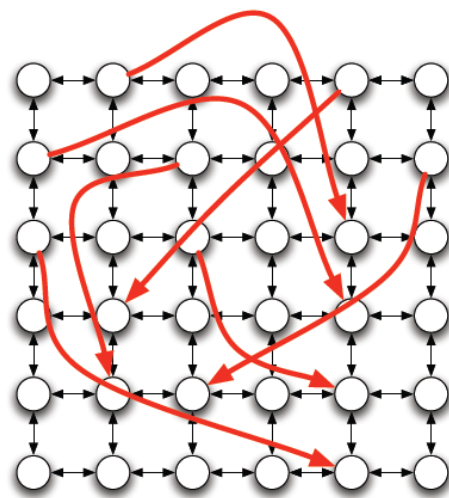
konačni Erdoševi brojevi nisu veći od 15, pri čemu je očekivana vrednost **4.65**. Ukoliko želite možete izračunati svoj Erdošev broj na adresi: <http://www.ams.org/mathscinet/collaborationDistance.html>

Sličnu situaciju imamo i u svetu filma - **Kevin Bejkonov broj**. Ukoliko posmatramo skup glumaca i vezu uspostavljamo ukoliko su glumili u istom filmu, dobijamo još jedan socijalni graf. Do decembra 2007. godine, najveći Kevin Bejkonov broj bio je 8, dok svega desetak posto glumaca nema put do njega. Još jedan interesantan primer ovog fenomena je **Wikipedia**, gde možemo posmatrati vezu između članaka ukoliko postoji link iz jednog ka drugom. Kao i praktični primer, možete skinuti igricu **Wiki Hunt** za iPhone, u kojoj ste vi taj koji na osnovu lokalne slike mreže bira kuda će ići kako bi povezo dva slučajna linka na Wikipediji (<http://itunes.apple.com/us/app/wiki-hunt-the-wikipedia-game/id357626743?mt=8>). Naravno, ne možemo a da ne pomenemo **Facebook** mrežu koja takođe potvrđuje ovaj fenomen. Jako zanimljive i poučne stripove o samom Milgramovom eksperimentu i teoriji malog sveta možete pogledati na <http://matteofarinella.wordpress.com/category/6-degrees-of-separation/>.

*„Jednog zimskog dana 1998. godine, matematičari Dankan Vots i Stiv Strogac, sa Univerziteta Kornel u Itaki, Njujork, seli su za sto u Strogacovom kabinetu i na parčetu papira nacrtali niz tačaka. Potom su neke tačke spojili linijama i tako napravili jednostavan obrazac koji matematičari nazivaju graf. Ovo možda ne izgleda kao ozbiljna matematika a svakako ne izgleda kao pravi način da se nešto otkrije. Pomenuti matematičari su brzo uvideli da su tačke spojili na poseban način koji do tada nijedan matematičar nije uočio. Tako su nabasali na novu i fascinantnu vrstu grafova.“*

(odlomak iz knjige Društvene mreže i teorija malog svet, Mark Bjukenon)

Hajde da malo skočimo u svet matematike. Kao što smo već napomenuli, jako je teško zamisliti realni model mreže koji bi zadovoljavao gornje uslove. Pretpostavimo da čovek u proseku poznaje 100 ljudi. Uzimajući u obzir da i svaki od vaših 100 prijatelja poznaje isto toliko ljudi, ona biste vi preko dva poznanstva mogli da dođete do  $100 * 100 = 10.000$  ljudi. Ukoliko ovako nastavimo, dobijamo da već u petom koraku vi poznajete više od 7 milijardi ljudi. Međutim, šta je loše u ovom rezonu? Naime, socijalna mreža sadrži grupe odnosno klastere – gusto povezane grupe ljudi, tako da se veliki procenat poznanika vaših prijatelja preklapa. Primera radi, ljudi sa kojima ste išli u osnovnu školu se svi međusobno poznaju. Zato se postavlja pitanje da li mi možemo konstruisati neki jednostavni model koji bi zadovoljavao gornja dva uslova dobijena iz Milgramovog eksperimenta? Naravno odgovor je potvrđan (*"Mi moramo znati. Mi ćemo znati."* - David Hilbert).

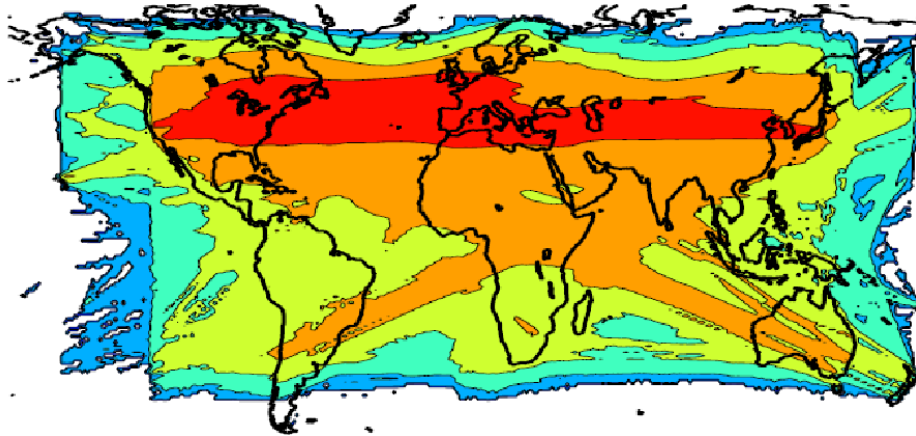


Jedan od prvih modela ove vrste je poznati **Vats-Strogac model**. Pretpostavimo da svi živimo u dvodimenzionalnoj rešetki. Ljudi se nalaze u čvorovima rešetke i poznaju svoja 4 najbliža suseda (gornjeg, donjeg, levog i desnog). Pored ovoga za svaku osobu ćemo dodati još jedno poznanstvo ka bilo kojoj slučajnoj osobi u našem modelu (ovaj uslov čak možemo i oslabiti tako da samo određeni procenat ljudi ima još nekog dalekog slučajnog poznanika). Primer oslabljene verzije modela možete pogledati na slici.

Ispostavlja se da ovako jednostavan i nimalo gust model jako dobro simulira tražene osobine socijalne mreže. Naime, očekivana dužina najkraćeg puta između dve osobe u ovaj mreži je proporcionalna  $\log(N)$ , gde je  $N$  broj čvorova u samoj mreži. Sa druge strane, potreban nam je metod, kojim poznavanjem samo lokalne slike mreže i npr. pozicije ciljne osobe (ovde pozicije možemo posmatrati kao koordinate), dobro aproksimiramo najkraće puteve. Fascinantno je da to dobijamo jako jednostavnim metodom - iz trenutnog čvora prelazimo u čvor koji je najbliži traženom po taxi rastojanju (taxi rastojanje predstavlja sumu apsolutnih razlika koordinata). U nekoj oslabljenoj verziji ovog modela očekivana dužina puta dobijena ovom metodom je proporcionalna trećem korenu broja čvorova (napomenimo da smo ovde uzeli da je broj poznanstava samo 5 ili 4, što je mnogo manje od realne socijalne mreže). Na ovom konceptu je zasnovana i adresa koju pišemo na poledini pisma – zemlja, država, grad, ulica, broj.

Kako ne bi došlo do zabune, opisani model nije dobar model same socijalne mreže kakvu danas imamo. Prva osobina socijalnih mreža je bila upravo kratka povezanost, tako da izneti model opisuje osobine dobijene Milgramovim eksperimentom. Modeli socijalnih mreža moraju zadovoljavati mnoge druge osobine: mnoštvo klastera (gusto povezanih grupa), distribuciju broja poznanstava (jako mali broj ljudi sva velikim brojem prijatelja i jako mnogo ljudi sa malim brojem prijatelja)...

Pored navedenih eksperimenata, svakako najupečatljiviji je rezultat eksperimenta iz juna 2006. godine koji je sproveden nad MSN-om, gde su posmatrani korisnici i njihova komunikacija. U periodu od 30 dana, 245 miliona ljudi je bilo ulogovano dok je nekih 180 miliona učestvovalo u barem jednom razgovoru / dopisivanju preko MSN-a. Ukupan broj komunikacija između navedenih korisnika je neverovatno veliki: 30 milijardi razgovora i 255 milijardi dopisivanja, pri čemu je ukupno 30ak milijardi komunikacija bilo između različitih parova osoba (drugim rečima u ovaj MSN mreži je ukupno bilo 180 miliona čvorova i 30 milijardi veza između njih). Analiza ovako velikih mreža praktično nije moguća u potpunosti, ali se nad dobro odabranim uzorkom mogu dobiti rezultati koji se od tačnih razlikuju zanemarljivo malo (primera radi ukoliko bi u takvoj mreži želeli da izračunate najkraća rastojanja između svaka dva čvora bilo bi vam potrebno preko 100 godina). Dobijeni rezultati najkraćih puteva su samo potvrdili našu dosadašnju priču - prosečna dužina najkraćeg puta između dva korisnika je približno jednaka 6.6, pri čemu se sa samo 8 koraka obuhvata više od 90% mreže. Ovom analizom autori su dobili još mnoštvo imponantnih statistika i ilustracija. Zainteresovanim čitaocima predlažemo da pogledaju njihov rad: <http://arxiv.org/abs/0803.0939>



MSN eksperiment

Za svaku komunikaciju između osoba A i B, pojačan je intenzitet boje na liniji koja ih spaja.

Ove zanimljive matematičke strukture i fenomeni su samo uvod u daleko važnija i zanimljivija otkrića - **teoriju socijalnih mreža**. Nadamo se da je ovo bio dobar uvod i da smo vam barem malo približili lepotu koju ona krije. Sledeći put kada budete sedeli u autobusu i kada u toku priče sa slučajnom osobom, koja je sela pored vas, saznate da imate zajedničke poznanike, misao kako je svet mali imaće drugo značenje.